جامعة الإخوة منتوري قسنطينة

LMD, ST2

امتحان: إحصاء - احتمالات

29/01/2019

1^h30

تمرين 1: (10,75)

تم تصنيف أعضاء نادي رياضي حسب العمر في الجدول التالي:

العمر	[8, 10[	[10,12[	[12, 14[	[14,18[
n_i	6	14	8	12

- عين المجتمع الإحصائي، الصفة المدروسة ونوعها.
- أكمل الجدول الإحصائي واحسب الخاصيات الإحصائية (تمركز، تشتت)
- ارسم المخطط التفاضلي والتكاملي وعين بيانيا M، Q_1، Q_3.
- احسب النسبة المئوية للأفراد داخل المجال $[\bar{X}, \bar{X}+\sigma[$

تمرين 2: (9,25)

كيس به 3 كرات بيضاء مرقمة 0، 1، 2 و 4 كرات حمراء مرقمة 1، 1، 2، 2. نسحب عشوائيا في آن واحد 3 كرات. احسب احتمال:

A- "الحصول على 3 كرات من نفس اللون"

B- " " " تحمل نفس الرقم"

C- " " " تحمل أرقام مختلفة"

D- " " " تحمل ألوان مختلفة"

2- ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب عدد الكرات المسحوبة التي تحمل رقم 1.

- عين $X(\Omega)$، قانون احتمال X، $E(X)$، $\sigma(X)$.
- احسب $P(|X-2|\leq 1)$، $P(X^2-5X+4\leq -2)$

29/01/19

تصحيح امتحان: إحصاء - احتمالات

تمرين 1: 10,75

0,5 المجتمع الإحصائي مكوّن: 40 عضو نادي رياضي.

0,5 الصفة المدروسة: العمر، وهي صفة كمية مستمرة. 0,5

e_i	n_i	f_i	F_i	a_i	c_i	n_i/a_i	f_ic_i	$f_ic_i^2$
8			0					
10	6	0,15	0,15	2	9	3	1,35	12,15
12	14	0,35	0,5	2	11	7	3,85	42,35
14	8	0,2	0,7	2	13	4	2,6	33,8
18	12	0,3	1	4	16	3	4,8	76,8
$\sum$	N=40	1					$\boxed{12,6}$	$\boxed{165,1}$

2

2- خاصيات التمركز والتشتت

1-1 الصف المنوالي: هو الصف $[10,12[$ 0,25

$F(Q_1)=0,25;\ Q_1\in[10,12[\Rightarrow \frac{Q_1-10}{2}=\frac{0,25-0,15}{0,35} \Rightarrow \boxed{Q_1=10,57}$ 0,25 0,25

$F(M)=0,5;\ M=12$ 0,5

$F(Q_3)=0,75;\ Q_3\in[14,18[\Rightarrow Q_3=14+4\,\frac{0,75-0,7}{0,3} \Rightarrow \boxed{Q_3=14,66}$ 0,25 0,25

$\bar{X}=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{4}n_ic_i=\sum_{i=1}^{4}f_ic_i=\boxed{12,6}$ 0,5

$V(X)=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{4}n_ic_i^2-\bar{X}^2=\sum_{i=1}^{4}f_ic_i^2-\bar{X}^2=165,1-(12,6)^2=\boxed{6,34}$ 0,75

$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{6,34}\simeq\boxed{2,52}$ 0,25

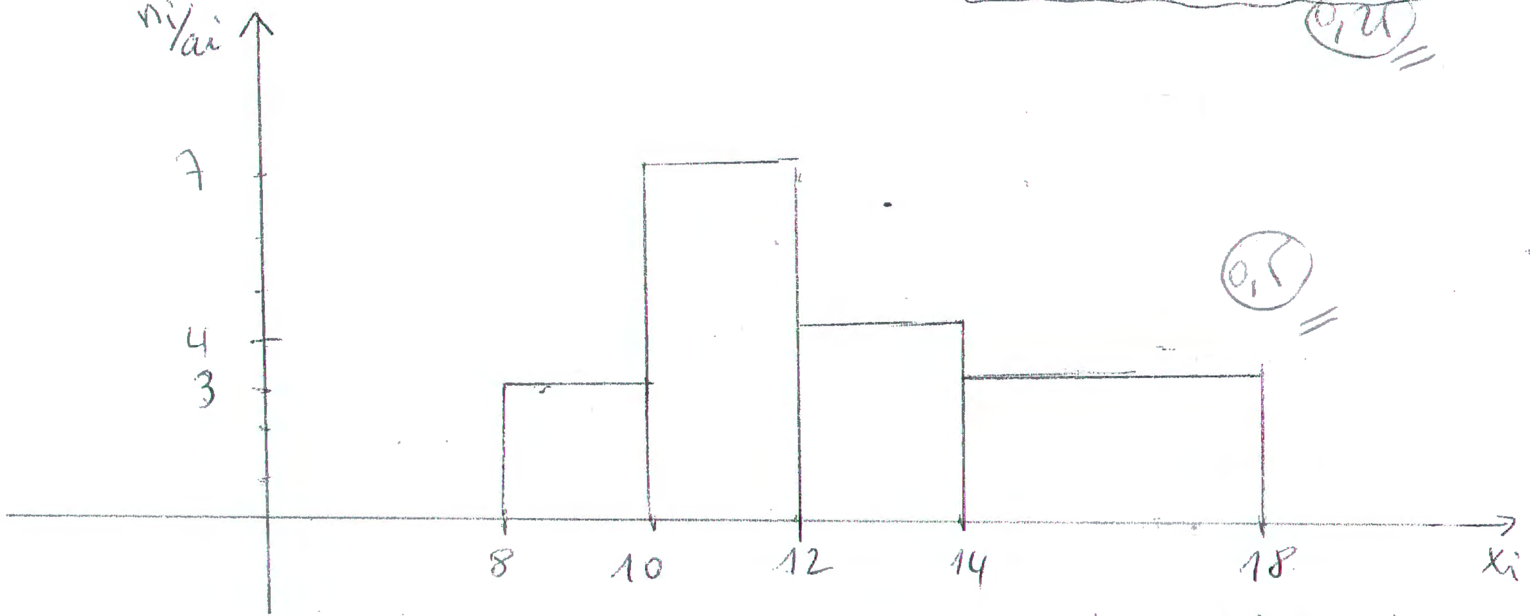
$E=e_k-e_0=18-8=\boxed{10}$ 0,5 , $IQ=Q_3-Q_1=14,66-10,57=\boxed{4,09}$ 0,5

4) $[\bar{X},\bar{X}+\sigma[=[12,6;\ 15,12[$; $F(15,12)-F(\bar{X})=?$

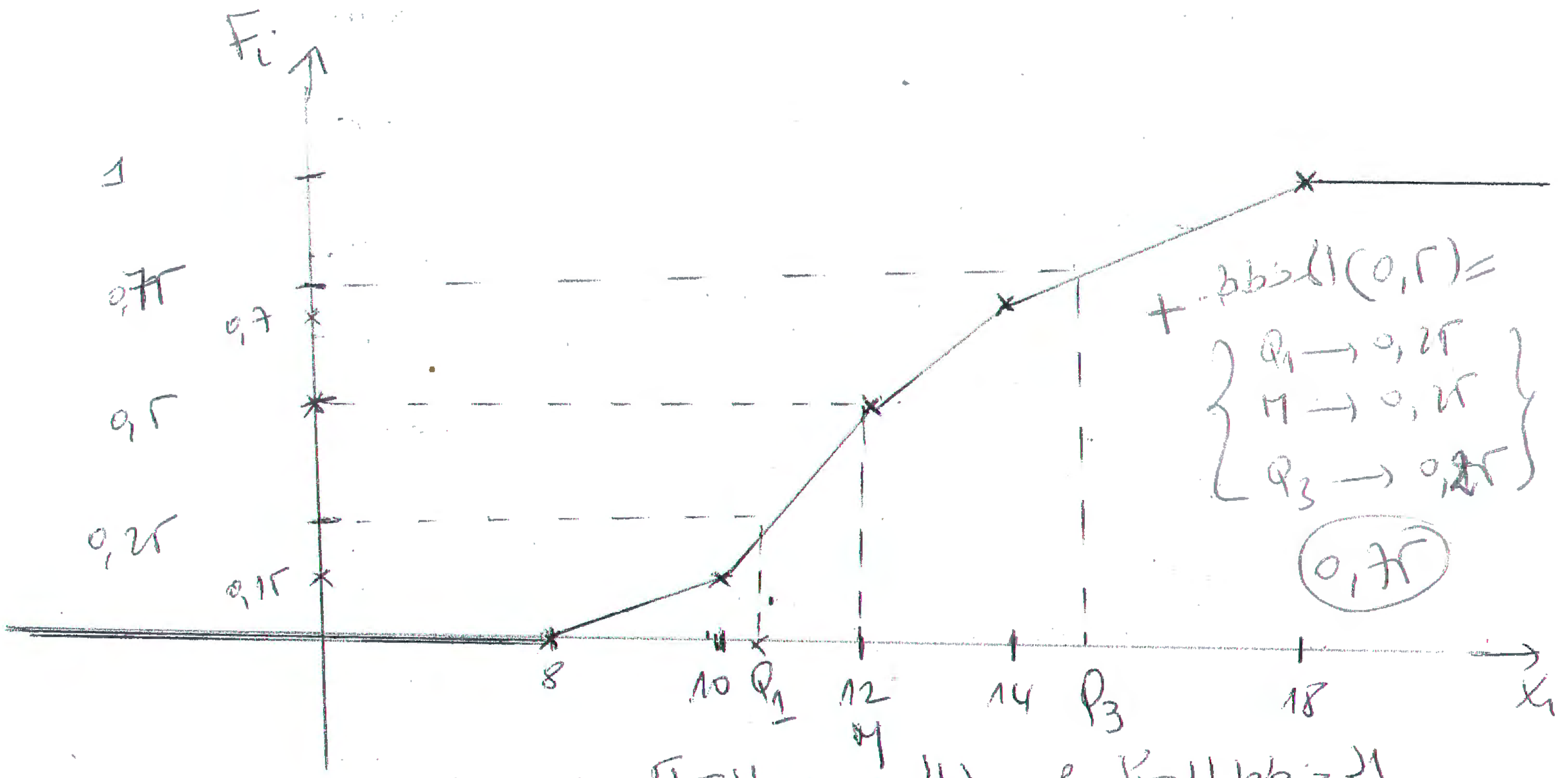
$\bar{X} \in [12, 14[\Rightarrow \dfrac{\bar{X} - 12}{2} = \dfrac{F(\bar{X}) - 0,5}{0,35} \Rightarrow F(\bar{X}) = \boxed{0,61}$ 0,25

$15,12 \in [14, 18[\Rightarrow \dfrac{15,12 - 14}{4} = \dfrac{F(15,12) - 0,7}{0,3} \Rightarrow F(15,12) = \boxed{0,78}$ 0,25 0,25

$F(15,12) - F(\bar{X}) = 0,78 - 0,61 = 0,17 \Rightarrow \boxed{17\% \in [\bar{X}, \bar{X}+\sigma[}$ 0,25



المخطط التفاضلي (النسيجي)



المخطط التكاملي (المنحنى التراكمي)

$\begin{array}{|llll|} B_0 & B_1 & B_2 & \\ R_1 & R_1 & R_2 & R_2 \end{array}$ (3)

$\mathrm{card}(\Omega) = C_7^3 = \frac{7!}{3!\,4!} = \boxed{35}$ 0,5

ع

1- $P(A) = \frac{C_3^3 + C_4^3}{C_7^3} = \frac{1+4}{35} = \frac{5}{35}$ 0,75 , $P(D) = 0$ 0,75

$P(B) = \frac{C_1^1 C_2^2 + C_1^1 C_2^2}{C_7^3} = \frac{2}{35}$ 0,75 , $P(C) = \frac{C_1^1 C_3^1 C_3^1}{C_7^3} = \frac{9}{35}$ 0,75

$X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\}$. 1 $(0,25 \times 4)$

قانون احتمال X :

$P(X=0) = \frac{C_4^3}{C_7^3} = \frac{4}{35}$ 0,5 ; $P(X=2) = \frac{C_3^2 C_4^1}{C_7^3} = \frac{12}{35}$ 0,5

$P(X=1) = \frac{C_3^1 C_4^2}{C_7^3} = \frac{18}{35}$ 0,5 ; $P(X=3) = \frac{C_3^3}{C_7^3} = \frac{1}{35}$ 0,5

$E(X) = \sum_{i=1}^{4} x_i P_i = \boxed{1,29}$ 0,5

x_i	0	1	2	3	Σ
P_i	$4/35$	$18/35$	$12/35$	$1/35$	1
$x_i P_i$	0	$18/35$	$24/35$	$3/35$	1,2
$x_i^2 P_i$	0	$18/35$	$48/35$	$9/35$	2,14

$V(X) = E(X^2) - E^2(X) = \sum x_i^2 P_i - (1,29)^2$

$= 2,14 - (1,29)^2 = \boxed{0,481}$ 0,5

$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} \simeq \boxed{0,69}$ 0,25

$P(|X-2| \leq 1) = P(-1 \leq X-2 \leq 1) = P(1 \leq X \leq 3)$

$= P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) = \frac{31}{35}$ 0,75

$P(X^2 - 5X + 4 \leq -2) = P(X^2 - 5X + 6 \leq 0)$

	2		3	
+	0	−	0	+

$= P(2 \leq X \leq 3) = P(X=2) + P(X=3) = \frac{13}{35}$

0,75

2019 / 2018 السنة الدراسية

جامعة الاخوة منتوري-قسنطينة

كلية العلوم والتكنولوجيا

السنة الثانية ST

امتحان في مقياس الرياضيات 3

التمرين 01 (6points)

احسب التكامل المعمم ثم استنتج طبيعته.

Calculer l'intégrale généralisée et déduire sa nature

$$I_1 = \int_1^{+\infty} \frac{x}{(x^2+1)^2}\,dx$$

ادرس طبيعة التكاملات المعممة الاتية:

Etudier la nature des intégrales généralisées

$$I_2 = \int_0^{+\infty} \frac{x^2+5x}{x^3+3x+1}\,dx \ ; \ I_3 = \int_2^3 \frac{1}{(x+3)\sqrt[3]{x-2}}\,dx \ ; \ I_4 = \int_0^1 \cos\left(\frac{1}{x}\right)dx$$

التمرين 02 (7 points)

لتكن f دالة فردية 2π دورية:

Soit f une fonction impaire 2π périodique :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{x}{2} & ; \ x \in [0, \pi] \\ \dfrac{-\pi}{2} - \dfrac{x}{2} & ; \ x \in \ [-\pi, 0[\end{cases}$$

1- Dessiner la courbe de f sur$[-\pi, \pi]$ — ارسم منحنى f على $[-,\pi]$

2- Donner la série de Fourier associée à *f* — عين سلسلة Fourier الملحقة ل *f*

3- Vérifier les conditions de Dirichlet — تحقق من شروط Dirichlet

4- Déduire la somme de la série de Fourier — *استنتج مجموع سلسلة Fourier*

5- calculer les sommes — *احسب المجاميع*

$$\sum_{n\geq 1} \frac{\sin(n)}{n} \ ; \ \sum_{k\geq 0} \frac{(-1)^k}{2k+1} \ ; \ \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$$

التمرين 03 7 points

1 - Calculer : $L^{-1}\left(\frac{2s+1}{(s-2)(s^2+1)}\right)$ *et résoudre l'équation différentielle suivante :*

$$\begin{cases} y'' - \dfrac{5}{2}y' + y = \dfrac{-5}{2}\sin\ t \\ y(0) = 0 \ ; \ y'(0) = 2 \end{cases}$$

2- Calculer la transformée de Fourier de la fonction suivante (b une constante > 0)

$$y(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{2b} & ; \quad t \in [-b, +b] \\ 0 & ; \quad t \in]-\infty, -b[\ \cup \ ]b, +\infty[\end{cases}$$

Exo1 (6pts) Corrigé type Contrôle 2018-2019.

Exercice 01 $\boxed{I_1 = 1,25}$

$$I_1 = \int_1^{+\infty} \frac{x}{(x^2+1)^2}\,dx.$$

f معرفة و مستمرة على .

$f \in Loc[1,+\infty[$ (0,25) $\Leftarrow$ $[1,+\infty[$

$$I_1 = \frac{1}{2}\int_1^{+\infty} \frac{2x}{(x^2+1)^2}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[\int_1^{+\infty} \underbrace{(x^2+1)^{-2}}_{g}\,\underbrace{2x}_{g'}\,dx\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{(x^2+1)^{-2+1}}{-2+1}\right]_1^{+\infty} = \frac{-1}{2}\left[\frac{1}{x^2+1}\right]_1^{\infty} \quad (0,5)$$

$$= \frac{-1}{2}\left(0 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} \quad (0,25)$$

(0,25) I_1 متقارب

$$I_2 = \int_0^{+\infty} \frac{x^2+5x}{x^3+3x+1}\,dx.$$

f معرفة و مستمرة على

(0,25) $f \in Loc[0,+\infty[$ $\Leftarrow$ $[0,+\infty[$

$\forall x \in [0,+\infty[\;:\; f(x) \geq 0$ (0,25)

نطبق التكافؤ أو قاعدة Riemann.

$\lim\limits_{x\to+\infty} x^\alpha f(x) =$ (0,25).

$$= \lim_{x\to+\infty} x\,\frac{x^2+5x}{x^3+3x+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{x^3} = 1 \quad (0,25)$$

(0,25) $\alpha = 1 \leq 1 \;;\; k = 1 \neq 0 \Rightarrow$ تكامل متباعد .

(0,25)

$\boxed{I_2 = 1,5}$

Page 1

$$I_3 = \int_2^3 \frac{1}{(x+3)\sqrt[3]{x-2}}\,dx. \quad \boxed{I_3 = 1}$$

f معرفة و مستمرة على $]2,3]$

$\Leftarrow$ $f \in Loc]2,3]$ (0,25)

$\forall x \in]2,3] \;:\; f(x) > 0.$ (0,25)

نطبق قاعدة R

$\lim\limits_{x\to 2^>} (x-2)^\alpha f(x)$ (0,25)

$$\lim_{x\to 2^>} (x-2)^{1/3}\,\frac{1}{(x+3)\sqrt[3]{x-2}} = \frac{1}{5} \quad (0,25)$$

$\alpha = \frac{1}{3} < 1 \;;\; k = \frac{1}{5} \neq \infty \Rightarrow$ (0,25)

(0,25) I_2 متقارب

$$I_4 = \int_0^1 \cos\left(\frac{1}{x}\right)dx. \quad \boxed{I_4 = 1,75}$$

$y = \frac{1}{x} \Rightarrow x = \frac{1}{y} \Rightarrow dx = \frac{-1}{y^2}dy$

$x \to 0 \Rightarrow y \to +\infty$

$x \to 1 \Rightarrow y \to 1$

$$I = \int_{+\infty}^1 \cos y\left(-\frac{1}{y^2}\right)dy.$$

$$= -\int_{+\infty}^1 \cos y\left(\frac{1}{y^2}\right)dy.$$

$$= \int_1^{+\infty} \frac{1}{y^2}\cos y\,dy. \quad (0,5\text{ pts})$$

ABEL.

$f(y) = \frac{1}{y^2}.$

(2,5 points)

②

$$y(t) = \begin{cases} \frac{1}{2b} & t \in [-b, +b] \\ 0 & t \notin [-b, +b] \end{cases}$$

$$\hat{y}(s) = \mathcal{F}(y(t)) = \int_{\mathbb{R}} y(t) e^{-its} dt$$ 0,5

$$= \int_{-\infty}^{-b} \overbrace{y(t)}^{0} e^{-its} dt + \int_{-b}^{+b} y(t) e^{-its} dt + \int_{b}^{+\infty} \overbrace{y(t)}^{0} e^{-its} dt$$

$$= \int_{-b}^{b} \frac{1}{2b} e^{-its} dt$$ 0,25

$\boxed{s \neq 0 \quad 0,25}$

$$= \frac{1}{2b} \frac{1}{-is} \left[e^{-its} \right]_{-b}^{+b}$$

$$= \frac{1}{2b} \left(\frac{1}{-is} \left(e^{-ibs} - e^{+ibs} \right) \right)$$ 0,25

$$= \frac{1}{bs} \left[\frac{e^{i(bs)} - e^{-i(bs)}}{2i} \right]$$ 0,25

$$= \frac{\sin(bs)}{bs}$$ 0,5

pour $s = 0$. 0,5

$$\mathcal{F}(y(t)) = \hat{y}(0) = 1.$$

$$\hat{y}(s) = \begin{cases} \frac{\sin(bs)}{bs} & s \neq 0 \\ 1 & s = 0 \end{cases}$$

page 4

Suite de l'exo 2.

$$\sum_{n \geq 1} \frac{\sin(nx)}{n} = f(x)$$

$x = \frac{\pi}{2}$. 0,25

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}.$$ 0,25

$$\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right) = \begin{cases} 0 & n = 2k \\ (-1)^k & n = 2k+1 \end{cases}$$ 0,25

$$\sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k}{(2k+1)} = \frac{\pi}{4}$$ 0,25